

## Chapitre 13 Équations différentielles

**Exercice 1 :** On détermine les solutions de l'équation homogène, puis on utilise la méthode de la variation de constante pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle. Les solutions sont

(i)  $y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{t}{2} + A \exp\left(-\frac{2}{7}t\right)$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,

(ii)  $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} + A \exp(-2t)$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,

(iii)  $y(t) = -\frac{3}{5} \cos(t) - \frac{1}{5} \sin(t) + A \exp(2t)$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,

(iv)  $y(t) = -1 + A \exp\left(\frac{t^2 + 2t}{2}\right)$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,

(v)  $y(t) = \exp(t) + A \exp(t^2)$  avec  $A \in \mathbb{R}$ ,

(vi)  $y(t) = t - 1 + A(t^2 + 1)^{1/2} \exp(\text{Arctan}(t))$  avec  $A \in \mathbb{R}$ .

**Exercice 2 :**

(i) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de  $\mathbb{R}^*$  sont

$$y(t) = At^2 + t^3 \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de (E), alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur  $(a, b)$ . La fonction  $y$  est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur  $(a, b)$ . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

(ii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de  $\mathbb{R}^*$  sont

$$y(t) = A \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de (E), alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$y(t) = \begin{cases} a \exp(-1/t) & \text{si } t < 0 \\ b \exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui impose  $a = 0$ . La fonction  $y$  est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de nouvelle condition sur  $(a, b)$ . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ b \exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

(iii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de  $\mathbb{R}^*$  sont

$$y(t) = 1 + \frac{A}{t} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $(E)$ , alors il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$y(t) = \begin{cases} 1 + a/t & \text{si } t < 0 \\ 1 + b/t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t),$$

ce qui impose  $a = b = 0$ . Réciproquement, la fonction  $y(t) = 1$  est dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3 :** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continue vérifiant l'équation. En prenant  $x = 0$ , on obtient  $f(0) = 1$ . De plus, la fonction  $f$  est nécessairement dérivable, et en dérivant la relation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = xf(x).$$

Ainsi,  $f$  est solution de l'équation différentielle  $y' = xy$ , donc il existe  $A \in \mathbb{R}$  tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Comme  $A = f(0) = 1$ , on obtient nécessairement que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction est solution de l'équation.

**Exercice 4 :** On détermine les solutions de l'équation homogène en utilisant l'équation caractéristique, puis on détermine une solution particulière de l'équation différentielle. Les solutions sont

$$(i) \quad y(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) + \frac{3}{10}e^{-t} \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(ii) \quad y(t) = Ae^t + Be^{3t} - \frac{1}{2}te^t \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(iii) \quad y(t) = Ae^t + Bte^t + t^2e^t \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(iv) \quad y(t) = Ae^{-t} \cos(t) + Be^{-t} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(v) \quad y(t) = Ae^t + Be^{2t} + \frac{3}{20} \cos(2t) - \frac{1}{20} \sin(2t) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2,$$

$$(vi) \quad y(t) = Ae^t \cos(t) + Be^t \sin(t) + \frac{1}{2}te^t \sin(t) \text{ avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

### Exercice 5 :

1. En notant  $z(t) = (1 + e^t)y(t)$ , on a

$$z'(t) = (1 + e^t)y'(t) + e^ty(t),$$

$$z''(t) = (1 + e^t)y''(t) + 2e^ty'(t) + e^ty(t).$$

Ainsi, on obtient que si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = e^t \quad (E').$$

2. D'après la question précédente, en déterminant les solutions de  $(E')$ , on obtient

$$z(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{1}{2}e^t \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Avec la relation  $z(t) = (1 + e^t)y(t)$ , on conclut que les solutions de  $(E)$  sont

$$y(t) = A \frac{\cos(t)}{1 + e^t} + B \frac{\sin(t)}{1 + e^t} + \frac{e^t}{2(1 + e^t)} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de  $(E)$ .

### Exercice 6 :

1. En notant  $z(t) = y(e^t)$ , on a

$$z'(t) = e^ty'(e^t) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t).$$

Si l'on pose  $x = e^t$  dans l'équation  $(E)$ , elle se réécrit

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + 4e^t = 0.$$

On en déduit que  $z$  vérifie l'équation différentielle

$$z'' - 4z' + 4z = 0 \quad (E').$$

2. D'après la question précédente, en déterminant les solutions de  $(E')$ , on obtient

$$z(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Avec la relation  $y(x) = z(\ln(x))$ , on conclut que les solutions de  $(E)$  sont de la forme

$$y(t) = Ax^2 + Bx^2 \ln(x) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de  $(E)$ .

**Exercice 7 :**

1. On remplace  $y(x) = x^\alpha$  dans l'équation  $(E)$

$$\alpha(\alpha - 1)x^2x^{\alpha-2} + \alpha x x^{\alpha-1} - a^2x^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha^2 - a^2)x^\alpha = 0.$$

On en déduit que  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $\alpha = \pm a$ .

2. Sur l'intervalle  $I$ , on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de  $(E)$  est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, les fonctions  $x \mapsto x^a$  et  $x \mapsto x^{-a}$  sont solutions de l'équation différentielle  $(E)$ . Comme ces solutions ne sont pas colinéaires, elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. Ainsi, les solutions de  $(E)$  sont

$$y(x) = Ax^a + Bx^{-a} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 8 :**

1. Soit  $y$  une fonction polynomiale de terme dominant  $a_n t^n$  avec  $a_n \neq 0$ . Si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors en isolant le terme dominant dans l'équation  $(E)$ , on obtient

$$(n(n-1) - 2n + 2)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(n-2) = 0.$$

Ainsi le polynôme  $y$  est de degré au plus 2. En écrivant  $y(t) = at^2 + bt + c$ , puis en remplaçant dans  $(E)$ , on obtient

$$(t+1)^2(2a) - 2(t+1)(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 2b + 2c = 0.$$

On conclut que les solutions polynomiales de  $(E)$  sont les fonctions

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Sur l'intervalle  $I = ]-\infty, -1[$  ou  $I = ]-1, +\infty[$ , on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' - \frac{2}{t+1}y' + \frac{2}{(t+1)^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de  $(E)$  sur  $I$  est un espace vectoriel de dimension 2. A la question précédente, on a déterminé des solutions de  $(E)$  qui forment un espace de dimension 2. Ainsi, les solutions de  $(E)$  sur  $I$  sont

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si il existe une solution  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de  $(E)$ , alors il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$y(t) = \begin{cases} A(t^2 - 1) + B(t + 1) & \text{si } t < -1 \\ C(t^2 - 1) + D(t + 1) & \text{si } t > -1 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en  $-1$ , donc on doit avoir

$$y(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y(t),$$

ce qui ne donne pas de condition sur  $(A, B, C, D)$ . La fonction  $y$  est dérivable en  $-1$ , donc on doit avoir

$$y'(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y'(t),$$

ce qui impose  $B - 2A = D - 2C$ . La fonction  $y$  est deux fois dérivable en  $-1$ , donc on doit avoir

$$y''(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y''(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y''(t),$$

ce qui impose  $A = C$ . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

est deux fois dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

#### Exercice 9 :

1. Soit  $y$  une fonction polynomiale de terme dominant  $a_n t^n$  avec  $a_n \neq 0$ . Si  $y$  est solution de  $(E)$ , alors en isolant le terme dominant dans l'équation  $(E)$ , on obtient

$$(n(n-1) - 2)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-2)(n+1) = 0.$$

Ainsi le polynôme  $y$  est de degré 2. En écrivant  $y(t) = at^2 + bt + c$ , puis en remplaçant dans  $(E)$ , on obtient

$$2a(t^2 + 1) - 2(at^2 + bt + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a = c.$$

On conclut que les solutions polynomiales de  $(E)$  sont les fonctions

$$y(t) = A(t^2 + 1) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. La solution  $h(t) = t^2 + 1$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant  $y = zh$  dans  $(E)$ , on obtient

$$(t^2 + 1)z'' + 4tz' = 0.$$

En notant  $u = z'$  et en résolvant  $(t^2 + 1)u' + 4tu = 0$ , on obtient

$$z'(t) = u(t) = \frac{A}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(t) = A \left( \frac{t}{t^2 + 1} + \text{Arctan}(t) \right) + B \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de  $(E)$  sur  $I$  sont

$$y(t) = A(t + (t^2 + 1)\text{Arctan}(t)) + B(t^2 + 1) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

#### Exercice 10 :

1. Soit  $y$  une fonction polynomiale de terme dominant  $a_n t^n$  avec  $a_n \neq 0$ . Si  $y$  est solution de  $(H)$ , alors en isolant le terme dominant dans l'équation  $(H)$ , on obtient

$$(n(n-1) + n - 1)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)(n-1) = 0.$$

Ainsi le polynôme  $y$  est de degré au plus 1. En écrivant  $y(t) = at + b$ , puis en remplaçant dans  $(H)$ , on obtient

$$at - (at + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

On conclut que les solutions polynomiales de  $(H)$  sont les fonctions

$$y(t) = At \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. Sur l'intervalle  $I = ]-\infty, 0[$  ou  $I = ]0, +\infty[$ , la solution  $h(t) = t$  ne s'annule pas. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant  $y = zh$  dans  $(E)$ , on obtient

$$t^3 z'' + 3t^2 z' = 1.$$

En notant  $u = z'$  et en résolvant  $t^3u' + 3t^2u = 1$ , on obtient

$$z'(t) = u(t) = \frac{A}{t^3} + \frac{1}{t^2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(t) = \frac{A}{t^2} + B - \frac{1}{t} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur  $I$  sont

$$y(t) = \frac{A}{t} + Bt - 1 \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si il existe une solution  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de (E), alors il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  tel que

$$y(t) = \begin{cases} A/t + Bt - 1 & \text{si } t < 0 \\ C/t + Dt - 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t),$$

ce qui impose  $A = C = 0$ . La fonction  $y$  est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t),$$

ce qui impose  $B = D$ . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = Bt - 1 \quad \text{avec } B \in \mathbb{R}.$$

est deux fois dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 11 :**

1. Soit  $y$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On peut écrire

$$\forall t \in ]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} (1+t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 4t \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 4n + 2)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left( (n+1)(n+2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) t^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_n.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = (-1)^p a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = (-1)^p a_1,$$

donc

$$y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1 + t^2}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur  $]-1, 1[$ . Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On vérifie que les fonctions de la forme

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

sont des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$ . L'ensemble de ces fonctions forment un espace vectoriel de dimension 2. De plus, on a l'équivalence

$$(E) \Leftrightarrow y'' + \frac{4t}{1 + t^2}y' + \frac{2}{1 + t^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$  est un espace vectoriel de dimension 2. On conclut que les solutions de (E) sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 12 :**

1. Soit  $y$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On peut écrire

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} x(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-3x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-n(n-1) - 3n - 1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n)a_n x^{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left( -(n+1)^2 a_n + (n+1)^2 a_{n+1} \right) x^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x) = \frac{A}{1-x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction  $h(x) = (1-x)^{-1}$  est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles  $I = ]-\infty, 0[$ ,  $I = ]0, 1[$  ou  $I = ]1, +\infty[$ . On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant  $y = zh$  dans (E), on obtient

$$xz'' + z' = 0.$$

En notant  $u = z'$  et en résolvant  $xu' + u = 0$ , on obtient

$$z'(x) = u(x) = \frac{A}{x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(x) = A \ln(|x|) + B \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur  $I$  sont

$$y(x) = \frac{A \ln(|x|)}{1-x} + \frac{B}{1-x} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (E), alors il existe  $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$  tel que

$$y(x) = \begin{cases} (A \ln(-x) + B)/(1-x) & \text{si } x < 0 \\ (C \ln(x) + D)/(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (E \ln(x) + F)/(1-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x),$$

ce qui impose  $A = C = 0$  et  $B = D$ . La fonction  $y$  est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x),$$

ce qui impose  $D = F = 0$  et  $C = E$ . Finalement la seule de solution de (E) sur  $\mathbb{R}$  est la fonction nulle.

**Exercice 13 :**

1. Soit  $y$  une fonction développable en série entière de rayon de convergence  $R > 0$ . On peut écrire

$$\forall x \in ]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) a_n x^{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left( (n-1)^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \right) x^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit  $a_0 = 0$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_1.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_1 x}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur  $] -1, 1[$ . Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x) = \frac{Ax}{1-x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction  $h(x) = x/(1-x)$  est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles  $I = ]-\infty, 0[$ ,  $I = ]0, 1[$  ou  $I = ]1, +\infty[$ . On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant  $y = zh$  dans (E), on obtient

$$x^3 z'' + x^2 z' = 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x z'' + z' = 2x.$$

En notant  $u = z'$  et en résolvant  $xu' + u = 2x$ , on obtient

$$z'(x) = u(x) = \frac{A}{x} + x \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(x) = A \ln(|x|) + B + \frac{x^2}{2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur  $I$  sont

$$y(x) = \frac{Ax \ln(|x|)}{1-x} + \frac{Bx}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une solution de (E), alors il existe  $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$  tel que

$$y(x) = \begin{cases} (Ax \ln(-x) + Bx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } x < 0 \\ (Cx \ln(x) + Dx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (Ex \ln(x) + Fx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction  $y$  est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x),$$

ce qui ne donne pas de condition. La fonction  $y$  est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x),$$

ce qui impose  $A = C = 0$  et  $B = D$ . La fonction  $y$  est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x),$$

ce qui impose  $D = F = -1/2$  et  $C = E$ . Réciproquement, la fonction

$$y(x) = -\frac{x(x+1)}{2}$$

est solution de (E) sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 14 :**

(i) On a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + 2\mu e^{3t} \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = 3\lambda e^t + \mu e^{2t} \\ y(t) = 2\lambda e^t + \mu e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 2\beta + \gamma e^{6t} \\ y(t) = -\beta + 2\gamma e^{6t} \\ z(t) = \alpha - \gamma e^{6t} \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

(iv) On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \gamma e^{2t} \\ y(t) = \alpha - \beta e^t + \gamma e^{2t} \\ z(t) = -\alpha + \beta e^t + \gamma e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

(v) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^{-t} + \mu(2t+1)e^{-t} \\ y(t) = \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(vi) On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu(t+1)e^{-2t} \\ y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

**Exercice 15 :**

(i) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \underbrace{\alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \underbrace{\beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \underbrace{\gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ . Pour obtenir les solutions réelles, on remplace  $X_2$  et  $X_3$  qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient finalement

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ .

(ii) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \alpha e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \beta e^{it} \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \gamma e^{-it} \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$ . Pour obtenir les solutions réelles, on remplace  $X_2$  et  $X_3$  qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient

finalement

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

avec  $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$ .

**Exercice 16 :**

(i) On réduit la matrice  $A$  en fonction de  $t$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice  $P$  ne dépend pas de  $t$ , en posant  $Y = P^{-1}X$ , le système est équivalent à  $Y' = DY$ . On en déduit  $Y$ , puis en remplaçant dans  $X = PY$ , on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{t^2/2} \\ y(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{t^2/2} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Comme pour le premier, on a

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda \exp\left(\frac{(t+1)^2}{2}\right) + \mu \exp\left(\frac{(t-1)^2}{2}\right) \\ y(t) = -\lambda \exp\left(\frac{(t+1)^2}{2}\right) - 2\mu \exp\left(\frac{(t-1)^2}{2}\right) \end{cases}$$

avec  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 17 :** Une fonction  $y$  est solution de  $(E)$  si et seulement si  $y$  est la première composante d'un triplet  $(x_1, x_2, x_3)$  solution du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions de  $(E)$  sont

$$y(t) = x_1(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{2t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$