

Chapitre 13 Équations différentielles

Exercice 1 : On détermine les solutions de l'équation homogène, puis on utilise la méthode de la variation de constante pour déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle. Les solutions sont

(i) $y(t) = -\frac{7}{4} + \frac{t}{2} + A \exp\left(-\frac{2}{7}t\right)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(ii) $y(t) = \frac{1}{2}t^2 - \frac{3}{2}t + \frac{9}{4} + A \exp(-2t)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(iii) $y(t) = -\frac{3}{5} \cos(t) - \frac{1}{5} \sin(t) + A \exp(2t)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(iv) $y(t) = -1 + A \exp\left(\frac{t^2 + 2t}{2}\right)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(v) $y(t) = \exp(t) + A \exp(t^2)$ avec $A \in \mathbb{R}$,

(vi) $y(t) = t - 1 + A(t^2 + 1)^{1/2} \exp(\text{Arctan}(t))$ avec $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 2 :

(i) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de \mathbb{R}^* sont

$$y(t) = At^2 + t^3 \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t < 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur (a, b) . La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de condition sur (a, b) . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} at^2 + t^3 & \text{si } t \leq 0 \\ bt^2 + t^3 & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

(ii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de \mathbb{R}^* sont

$$y(t) = A \exp\left(-\frac{1}{t}\right) \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} a \exp(-1/t) & \text{si } t < 0 \\ b \exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = 0,$$

ce qui impose $a = 0$. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t) = 0,$$

ce qui ne donne pas de nouvelle condition sur (a, b) . Réciproquement, la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0 \\ b \exp(-1/t) & \text{si } t > 0 \end{cases} \quad \text{avec } b \in \mathbb{R}$$

est dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

(iii) Les solutions de l'équation différentielle sur les intervalles de \mathbb{R}^* sont

$$y(t) = 1 + \frac{A}{t} \quad A \in \mathbb{R}.$$

Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) , alors il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} 1 + a/t & \text{si } t < 0 \\ 1 + b/t & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t),$$

ce qui impose $a = b = 0$. Réciproquement, la fonction $y(t) = 1$ est dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

Exercice 3 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue vérifiant l'équation. En prenant $x = 0$, on obtient $f(0) = 1$. De plus, la fonction f est nécessairement dérivable, et en dérivant la relation, on obtient

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f'(x) = xf(x).$$

Ainsi, f est solution de l'équation différentielle $y' = xy$, donc il existe $A \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = A \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Comme $A = f(0) = 1$, on obtient nécessairement que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \exp\left(\frac{x^2}{2}\right).$$

Réciproquement, on vérifie que cette fonction est solution de l'équation.

Exercice 4 : On détermine les solutions de l'équation homogène en utilisant l'équation caractéristique, puis on détermine une solution particulière de l'équation différentielle. Les solutions sont

(i) $y(t) = A \cos(3t) + B \sin(3t) + \frac{3}{10}e^{-t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

(ii) $y(t) = Ae^t + Be^{3t} - \frac{1}{2}te^t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

(iii) $y(t) = Ae^t + Bte^t + t^2e^t$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

(iv) $y(t) = Ae^{-t} \cos(t) + Be^{-t} \sin(t) - \frac{2}{5} \cos(t) + \frac{1}{5} \sin(t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

(v) $y(t) = Ae^t + Be^{2t} + \frac{3}{20} \cos(2t) - \frac{1}{20} \sin(2t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

(vi) $y(t) = Ae^t \cos(t) + Be^t \sin(t) + \frac{1}{2}te^t \sin(t)$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 5 :

1. En notant $z(t) = (1 + e^t)y(t)$, on a

$$z'(t) = (1 + e^t)y'(t) + e^ty(t),$$

$$z''(t) = (1 + e^t)y''(t) + 2e^ty'(t) + e^ty(t).$$

Ainsi, on obtient que si y est solution de (E) , alors z vérifie l'équation différentielle

$$z'' + z = e^t \quad (E').$$

2. D'après la question précédent, en déterminant les solutions de (E') , on obtient

$$z(t) = A \cos(t) + B \sin(t) + \frac{1}{2}e^t \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Avec la relation $z(t) = (1 + e^t)y(t)$, on conclut que les solutions de (E) sont

$$y(t) = A \frac{\cos(t)}{1 + e^t} + B \frac{\sin(t)}{1 + e^t} + \frac{e^t}{2(1 + e^t)} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de (E) .

Exercice 6 :

1. En notant $z(t) = y(e^t)$, on a

$$z'(t) = e^ty'(e^t) \quad \text{et} \quad z''(t) = e^{2t}y''(e^t) + e^ty'(e^t).$$

Si l'on pose $x = e^t$ dans l'équation (E) , elle se réécrit

$$e^{2t}y''(e^t) - 3e^ty'(e^t) + 4e^t = 0.$$

On en déduit que z vérifie l'équation différentielle

$$z'' - 4z' + 4z = 0 \quad (E').$$

2. D'après la question précédente, en déterminant les solutions de (E') , on obtient

$$z(t) = Ae^{2t} + Bte^{2t} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Avec la relation $y(x) = z(\ln(x))$, on conclut que les solutions de (E) sont de la forme

$$y(t) = Ax^2 + Bx^2 \ln(x) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Réciproquement, on vérifie que ces fonctions sont solutions de (E) .

Exercice 7 :

1. On remplace $y(x) = x^\alpha$ dans l'équation (E)

$$\alpha(\alpha - 1)x^2x^{\alpha-2} + \alpha x x^{\alpha-1} - a^2x^\alpha = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha^2 - a^2)x^\alpha = 0.$$

On en déduit que y est solution de (E) si et seulement si $\alpha = \pm a$.

2. Sur l'intervalle I , on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{a^2}{x^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) est un espace vectoriel de dimension 2. De plus, les fonctions $x \mapsto x^a$ et $x \mapsto x^{-a}$ sont solutions de l'équation différentielle (E) . Comme ces solutions ne sont pas colinéaires, elles forment une base de l'espace vectoriel des solutions. Ainsi, les solutions de (E) sont

$$y(x) = Ax^a + Bx^{-a} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 8 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$. Si y est solution de (E) , alors en isolant le terme dominant dans l'équation (E) , on obtient

$$(n(n-1) - 2n + 2)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-1)(n-2) = 0.$$

Ainsi le polynôme y est de degré au plus 2. En écrivant $y(t) = at^2 + bt + c$, puis en remplaçant dans (E) , on obtient

$$(t+1)^2(2a) - 2(t+1)(2at+b) + 2(at^2+bt+c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2a - 2b + 2c = 0.$$

On conclut que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. Sur l'intervalle $I =]-\infty, -1[$ ou $I =]-1, +\infty[$, on a l'équivalence

$$(E) \quad \Leftrightarrow \quad y'' - \frac{2}{t+1}y' + \frac{2}{(t+1)^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur I est un espace vectoriel de dimension 2. A la question précédente, on a déterminé des solutions de (E) qui forment un espace de dimension 2. Ainsi, les solutions de (E) sur I sont

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E) , alors il existe $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} A(t^2 - 1) + B(t + 1) & \text{si } t < -1 \\ C(t^2 - 1) + D(t + 1) & \text{si } t > -1 \end{cases}$$

La fonction y est continue en -1 , donc on doit avoir

$$y(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y(t),$$

ce qui ne donne pas de condition sur (A, B, C, D) . La fonction y est dérivable en -1 , donc on doit avoir

$$y'(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y'(t),$$

ce qui impose $B - 2A = D - 2C$. La fonction y est deux fois dérivable en -1 , donc on doit avoir

$$y''(-1) = \lim_{t \rightarrow -1^-} y''(t) = \lim_{t \rightarrow -1^+} y''(t),$$

ce qui impose $A = C$. Réciproquement, la fonction

$$y(t) = A(t^2 - 1) + B(t + 1) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

est deux fois dérivable et elle vérifie l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

Exercice 9 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$. Si y est solution de (E) , alors en isolant le terme dominant dans l'équation (E) , on obtient

$$(n(n-1) - 2)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n-2)(n+1) = 0.$$

Ainsi le polynôme y est de degré 2. En écrivant $y(t) = at^2 + bt + c$, puis en remplaçant dans (E) , on obtient

$$2a(t^2 + 1) - 2(at^2 + bt + c) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0 \quad \text{et} \quad a = c.$$

On conclut que les solutions polynomiales de (E) sont les fonctions

$$y(t) = A(t^2 + 1) \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. La solution $h(t) = t^2 + 1$ ne s'annule pas sur \mathbb{R} . On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y = zh$ dans (E) , on obtient

$$(t^2 + 1)z'' + 4tz' = 0.$$

En notant $u = z'$ et en résolvant $(t^2 + 1)u' + 4tu = 0$, on obtient

$$z'(t) = u(t) = \frac{A}{(t^2 + 1)^2} \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(t) = A \left(\frac{t}{t^2 + 1} + \text{Arctan}(t) \right) + B \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(t) = A(t + (t^2 + 1)\text{Arctan}(t)) + B(t^2 + 1) \quad \text{avec} \quad (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 10 :

1. Soit y une fonction polynomiale de terme dominant $a_n t^n$ avec $a_n \neq 0$. Si y est solution de (H) , alors en isolant le terme dominant dans l'équation (H) , on obtient

$$(n(n-1) + n - 1)a_n = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (n+1)(n-1) = 0.$$

Ainsi le polynôme y est de degré au plus 1. En écrivant $y(t) = at + b$, puis en remplaçant dans (H) , on obtient

$$at - (at + b) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = 0.$$

On conclut que les solutions polynomiales de (H) sont les fonctions

$$y(t) = At \quad \text{avec} \quad A \in \mathbb{R}.$$

2. Sur l'intervalle $I =]-\infty, 0[$ ou $I =]0, +\infty[$, la solution $h(t) = t$ ne s'annule pas. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y = zh$ dans (E) , on obtient

$$t^3 z'' + 3t^2 z' = 1.$$

En notant $u = z'$ et en résolvant $t^3u' + 3t^2u = 1$, on obtient

$$z'(t) = u(t) = \frac{A}{t^3} + \frac{1}{t^2} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(t) = \frac{A}{t^2} + B - \frac{1}{t} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(t) = \frac{A}{t} + Bt - 1 \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si il existe une solution $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de (E), alors il existe $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$y(t) = \begin{cases} A/t + Bt - 1 & \text{si } t < 0 \\ C/t + Dt - 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y(t),$$

ce qui impose $A = C = 0$. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} y'(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} y'(t),$$

ce qui impose $B = D$. Réciproquement, la fonction

$$y(t) = Bt - 1 \quad \text{avec } B \in \mathbb{R}.$$

est deux fois dérivable d'après les calculs précédents et elle vérifie l'équation différentielle sur \mathbb{R} .

Exercice 11 :

1. Soit y une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R > 0$. On peut écrire

$$\forall t \in]-R, R[, \quad y(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} (1+t^2) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 4t \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n t^{n-1} + 2 \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + 4n + 2)a_n t^n + \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+1)(n+2)a_n + (n+2)(n+1)a_{n+2} \right) t^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+2} = -a_n.$$

Ainsi, on peut écrire

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad a_{2p} = (-1)^p a_0 \quad \text{et} \quad a_{2p+1} = (-1)^p a_1,$$

donc

$$y(t) = a_0 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p} + a_1 \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^p t^{2p+1} = \frac{a_0 + a_1 t}{1 + t^2}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $]-1, 1[$. Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

2. On vérifie que les fonctions de la forme

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

sont des solutions de (E) sur \mathbb{R} . L'ensemble de ces fonctions forment un espace vectoriel de dimension 2. De plus, on a l'équivalence

$$(E) \Leftrightarrow y'' + \frac{4t}{1 + t^2}y' + \frac{2}{1 + t^2}y = 0,$$

donc d'après le cours, l'ensemble des solutions de (E) sur \mathbb{R} est un espace vectoriel de dimension 2. On conclut que les solutions de (E) sur \mathbb{R} sont les fonctions

$$y(t) = \frac{At + B}{1 + t^2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 12 :

1. Soit y une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R > 0$. On peut écrire

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} x(1-x) \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + (1-3x) \sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1} - \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (-n(n-1) - 3n - 1)a_n x^n + \sum_{n=1}^{+\infty} (n(n-1) + n)a_n x^{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow - \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_n x^n + \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)^2 a_{n+1} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} \left(-(n+1)^2 a_n + (n+1)^2 a_{n+1} \right) x^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = a_0.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{a_0}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $] -1, 1[$. Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x) = \frac{A}{1-x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction $h(x) = (1-x)^{-1}$ est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y = zh$ dans (E), on obtient

$$xz'' + z' = 0.$$

En notant $u = z'$ et en résolvant $xu' + u = 0$, on obtient

$$z'(x) = u(x) = \frac{A}{x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(x) = A \ln(|x|) + B \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(x) = \frac{A \ln(|x|)}{1-x} + \frac{B}{1-x} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E), alors il existe $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} (A \ln(-x) + B)/(1-x) & \text{si } x < 0 \\ (C \ln(x) + D)/(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (E \ln(x) + F)/(1-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x),$$

ce qui impose $A = C = 0$ et $B = D$. La fonction y est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x),$$

ce qui impose $D = F = 0$ et $C = E$. Finalement la seule de solution de (E) sur \mathbb{R} est la fonction nulle.

Exercice 13 :

1. Soit y une fonction développable en série entière de rayon de convergence $R > 0$. On peut écrire

$$\forall x \in]-R, R[, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

En substituant dans (E), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) - n + 1) a_n x^n - \sum_{n=0}^{+\infty} (n(n-1) + n) a_n x^{n+1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} (n-1)^2 a_n x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} (n-1)^2 a_{n-1} x^n &= 0 \\ \Leftrightarrow a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} \left((n-1)^2 a_n - (n-1)^2 a_{n-1} \right) x^n &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on en déduit $a_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = a_n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = a_1.$$

Ainsi, on peut écrire

$$y(x) = a_1 \sum_{n=1}^{+\infty} x^n = \frac{a_1 x}{1-x}.$$

Réciproquement, cette fonction est développable en série entière sur $] -1, 1[$. Ainsi, les solutions de (E) développables en série entière sont les fonctions

$$y(x) = \frac{Ax}{1-x} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}.$$

2. On commence par vérifier que la fonction $h(x) = x/(1-x)$ est une solution de (E) qui ne s'annule pas sur les intervalles $I =]-\infty, 0[$, $I =]0, 1[$ ou $I =]1, +\infty[$. On peut utiliser la méthode de la variation de la constante. En posant $y = zh$ dans (E), on obtient

$$x^3 z'' + x^2 z' = 2x^3 \quad \Leftrightarrow \quad x z'' + z' = 2x.$$

En notant $u = z'$ et en résolvant $xu' + u = 2x$, on obtient

$$z'(x) = u(x) = \frac{A}{x} + x \quad \text{avec } A \in \mathbb{R},$$

donc

$$z(x) = A \ln(|x|) + B + \frac{x^2}{2} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

Finalement, les solutions de (E) sur I sont

$$y(x) = \frac{Ax \ln(|x|)}{1-x} + \frac{Bx}{1-x} + \frac{x^3}{2(1-x)} \quad \text{avec } (A, B) \in \mathbb{R}^2.$$

3. Si $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution de (E), alors il existe $(A, B, C, D, E, F) \in \mathbb{R}^6$ tel que

$$y(x) = \begin{cases} (Ax \ln(-x) + Bx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } x < 0 \\ (Cx \ln(x) + Dx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } 0 < x < 1 \\ (Ex \ln(x) + Fx + x^3/2)/(1-x) & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La fonction y est continue en 0, donc on doit avoir

$$y(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x),$$

ce qui ne donne pas de condition. La fonction y est dérivable en 0, donc on doit avoir

$$y'(0) = \lim_{x \rightarrow 0^-} y'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y'(x),$$

ce qui impose $A = C = 0$ et $B = D$. La fonction y est continue en 1, donc on doit avoir

$$y(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} y(x),$$

ce qui impose $D = F = -1/2$ et $C = E$. Réciproquement, la fonction

$$y(x) = -\frac{x(x+1)}{2}$$

est solution de (E) sur \mathbb{R} .

Exercice 14 :

(i) On a

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{2t} + 2\mu e^{3t} \\ y(t) = \lambda e^{2t} + \mu e^{3t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = 3\lambda e^t + \mu e^{2t} \\ y(t) = 2\lambda e^t + \mu e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(iii) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + 2\beta + \gamma e^{6t} \\ y(t) = -\beta + 2\gamma e^{6t} \\ z(t) = \alpha - \gamma e^{6t} \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

(iv) On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \alpha + \gamma e^{2t} \\ y(t) = \alpha - \beta e^t + \gamma e^{2t} \\ z(t) = -\alpha + \beta e^t + \gamma e^{2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$

(v) On a

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = 2\lambda e^{-t} + \mu(2t+1)e^{-t} \\ y(t) = \lambda e^{-t} + \mu t e^{-t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(vi) On a

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^{-2t} + \mu(t+1)e^{-2t} \\ y(t) = \lambda e^{-2t} + \mu t e^{-2t} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

Exercice 15 :

(i) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \underbrace{\alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \underbrace{\beta e^{(1+i)t} \begin{pmatrix} i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \underbrace{\gamma e^{(1-i)t} \begin{pmatrix} -i \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Pour obtenir les solutions réelles, on remplace X_2 et X_3 qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient finalement

$$X(t) = \alpha e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \gamma e^t \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

(ii) On a

$$P = \begin{pmatrix} 1 & i & -i \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -i \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions complexes du système sont

$$X(t) = \alpha e^t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix}}_{X_1(t)} + \beta e^{it} \underbrace{\begin{pmatrix} i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_2(t)} + \gamma e^{-it} \underbrace{\begin{pmatrix} -i \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{X_3(t)}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{C}^3$. Pour obtenir les solutions réelles, on remplace X_2 et X_3 qui sont conjugués par la leur partie réelle et imaginaire. On obtient

finalement

$$X(t) = \alpha e^t \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 2 \cos(t) \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 2 \sin(t) \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$.

Exercice 16 :

(i) On réduit la matrice A en fonction de t .

$$A = \begin{pmatrix} 2-t & t-1 \\ 2(1-t) & 2t-1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}.$$

Comme la matrice P ne dépend pas de t , en posant $Y = P^{-1}X$, le système est équivalent à $Y' = DY$. On en déduit Y , puis en remplaçant dans $X = PY$, on obtient

$$\begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{t^2/2} \\ y(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{t^2/2} \end{cases} \quad \text{avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2.$$

(ii) Comme pour le premier, on a

$$A = \begin{pmatrix} t+3 & 2 \\ -4 & t-3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} t+1 & 0 \\ 0 & t-1 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit

$$\begin{cases} x(t) = \lambda \exp\left(\frac{(t+1)^2}{2}\right) + \mu \exp\left(\frac{(t-1)^2}{2}\right) \\ y(t) = -\lambda \exp\left(\frac{(t+1)^2}{2}\right) - 2\mu \exp\left(\frac{(t-1)^2}{2}\right) \end{cases}$$

avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 17 : Une fonction y est solution de (E) si et seulement si y est la première composante d'un triplet (x_1, x_2, x_3) solution du système différentiel

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

On a

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

donc on en déduit que les solutions de (E) sont

$$y(t) = x_1(t) = \alpha e^t + \beta e^{-t} + \gamma e^{2t} \quad \text{avec} \quad (\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3.$$